ユーザ定義述語を含む系の限量子消去法 (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)

元吉, 文男; 秋葉, 澄孝

数理解析研究所講究録
1514巻 2006年 160-163

ユーザ定義述語を含む系の限量子消去法

元吉文男　　秋葉澄孝
F.MOTOYOSHI　　S.AKIBA
産業技術総合研究所　　産業技術総合研究所
ITRI, AIST　　ITRI, AIST

1 はじめに

限量子消去法は数学における問題解決の一般的手法であるが、対象にする系において、限量子消去が決定的に適用できる、すなわち、アルゴリズムが存在場合には、問題解決の手続きとして利用することが可能であり、従来から多くの研究が行なわれてきた。

それらの研究においては、限量子を消去したい式を対象となる公理系の言語で記述して、その式から限量子を消去するという手順で解を求めるという手法になっている。本稿では、基本となる公理系に新たに述語記号と、その述語に関する公理 (本稿では、これをユーザ述語定義と呼ぶ) を追加した系において限量子消去法を適用可能にする手法を紹介する。この手法は基本となる公理系に依存せず、任意の公理系に対して適用できるため、限量子消去が可能な公理系があれば、その上にユーザ述語定義を加えた系において、限量子消去法によって解を求める手段として利用することが可能である。

2 公理系とユーザ述語定義

公理系

まず基本となる公理系を本稿では A と書く。A は、記述しようとする系の対象となる集合、その上の関数、変数、および、それらに関する述語が与えられたときに、その述語を論理記号 $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$ で結合したもの (公理) の集まりである。

たとえば、実数の算術に関する場合には、対象となる集合は実数であり、関数は加減乗除算 $(+, -, \times, \div)$、述語は $=, <$ となる。

本稿での議論は任意の公理系に関して成立するが、その公理系において限量子消去が可能である場合には、述語定義を加えた系において解を導出する手続きを与えることになる。限量子消去が可能な公理系の例を次に示すが、その中には現実的な問題にも適用可能なものがある。

- Clark の等号公理 — 論理プログラミングにおける融合可能述語に関する公理系
- Presburger 算術 — 整数 Z の加減算 $+$、$-$、および等号、不等号 $=, <$ に関する公理系
- 実閉体 — 実数 R 上の四則、および等号、不等号 $=, <$ に関する公理系
- 代数閉体 — 複素数 C 上の四則、および等号 $=$ に関する公理系

なお、これらの公理系はいずれも完全である (その系に関する任意の論理式に関し、それ自身か、その否定のどちらかが証明できる) ことが知られている。

また、本稿での記述において t/f という述語を使用するが、これらはそれぞれ常に真/偽となる定数述語のこととする。このような述語を任意の公理系に加えても系に性質が変ることはない (公理の 1 つをとればそれは常に真であり、その否定は常に偽であるため、t/f という述語を追加しても公理系の性質に変化はない)。

ユーザ述語定義

ユーザ述語を定義するには、まずそれを表す記号が必要であり、それを $\boldsymbol{p}$ と書く。ここで、ボールド体で表示しているのは述語記号が複数個からなる場合も許していることを示す。本稿ではボールド体で記述した記号は複数個からなる並びを表しているものとする。公理のところで述べた真偽を示す述語も複数個並ぶ場合にはボールド体で表示する。また、それらの並びの 1 つを示すときには p_i のように添字を付けて表示する。

ある論理式中に出現する自由変数を制限する場合には $G[x]$ の様に書き、明示的に G は x 以外の自由変数を持たないことを示す。なお、それらの変数は出現しなくともよいものとする。

含意記号により構成される論理式 $a \leftarrow b$ は $a \vee \neg b$ のことだとし、$a \rightarrow b$ は $b \leftarrow a$、$a \leftrightarrow b$ は $(a \leftarrow b) \wedge (b \leftarrow a)$ のこととする。

述語定義 P とは次に示す論理式の集合とする。

$$P : \begin{cases} \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) & \leftarrow & \boldsymbol{Q}^{+}[\boldsymbol{x}]), \\ \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) & \leftarrow & \neg \boldsymbol{Q}^{-}[\boldsymbol{x}]) \end{cases} \tag{1}$$

ここで、$\boldsymbol{Q}^{+}[x], \boldsymbol{Q}^{-}[x]$ は x 以外の自由変数を含まない任意の論理式 ($\boldsymbol{p}$ を含む再帰的な定義でもよい) である。(1) による定義が一般的なものであることを示すためにいくつかの例を上げが、そこでは左辺の関係を表現するために、(1) の形にするために必要な $\boldsymbol{Q}^{+}, \boldsymbol{Q}^{-}$ の定義を右辺に示している。

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{x}(p(\boldsymbol{x}) \leftarrow Q[\boldsymbol{x}]) &\quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{Q}^{+}[\boldsymbol{x}] \equiv Q(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{Q}^{-}[\boldsymbol{x}] \equiv \mathrm{t}(\boldsymbol{x}) \\ \forall \boldsymbol{x}(p(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow Q[\boldsymbol{x}]) &\quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{Q}^{+}[\boldsymbol{x}] \equiv Q[\boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{Q}^{-}[\boldsymbol{x}] \equiv Q[\boldsymbol{x}] \\ \forall \boldsymbol{x}(C[\boldsymbol{x}] \rightarrow (p(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow Q[\boldsymbol{x}])) &\quad \Leftarrow \quad \boldsymbol{Q}^{+}[\boldsymbol{x}] \equiv C[\boldsymbol{x}] \wedge Q[\boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{Q}^{-}[\boldsymbol{x}] \equiv \neg(C[\boldsymbol{x}] \wedge \neg Q[\boldsymbol{x}]) \end{aligned}$$

最後の式は条件付き定義と考えることができ、さらに複数の条件がある場合には

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{x}((C_1[\boldsymbol{x}] \rightarrow (p(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow Q_1[\boldsymbol{x}])) \wedge (C_2[\boldsymbol{x}] \rightarrow (p(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow Q_2[\boldsymbol{x}])) \wedge \cdots \wedge (C_n[\boldsymbol{x}] \rightarrow (p(\boldsymbol{x}) \leftrightarrow Q_n[\boldsymbol{x}]))) \\ &\qquad \Leftarrow \\ &\qquad\quad \boldsymbol{Q}^{+}[\boldsymbol{x}] \equiv (C_1[\boldsymbol{x}] \wedge Q_1[\boldsymbol{x}]) \vee (C_2[\boldsymbol{x}] \wedge Q_2[\boldsymbol{x}]) \vee \cdots \vee (C_n[\boldsymbol{x}] \wedge Q_n[\boldsymbol{x}])), \\ &\qquad\quad \boldsymbol{Q}^{-}[\boldsymbol{x}] \equiv \neg((C_1[\boldsymbol{x}] \wedge \neg Q_1[\boldsymbol{x}]) \vee (C_2[\boldsymbol{x}] \wedge \neg Q_2[\boldsymbol{x}]) \vee \cdots \vee (C_n[\boldsymbol{x}] \wedge \neg Q_n[\boldsymbol{x}])) \end{aligned}$$

のように書くことができる。もちろん、述語記号を複数個用いて複数の定義を記述することもできる。

3 unfoldingによる解法

定義 1 (unfolding)

任意のユーザ述語式 $p(a)$ に対して、x 以外の自由変数を持たない論理式 $Q[x]$ という論理式において、x に $\boldsymbol{a}$ を代入することを、$p(a)$ を $Q[x]$ で *unfold* するという。なお、この際に、単に代入すると $\boldsymbol{a}$ 中の自由変

数が $Q[x]$ 中で束縛されることがあるが、そのときには、$Q[x]$ 中の束縛変数名を変更して、変数の衝突を避ける必要がある。

さらに、任意の論理式 G に関して *unfold* を次のように定義する。すなわち、G 中のすべてのユーザ述語式を、その述語記号の $\boldsymbol{p}$ 中での位置と同じ位置にある $\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{x}]$ 中の論理式で *unfold* する操作を、G を $\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{x}]$ で *unfold* するという。

またこの操作を $G\{\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\}$ という記法で表現し、この操作を n 回繰り返して行うことを $G\{\boldsymbol{Q}[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\}^n$ と書く。

定義 2 (正 (負) の出現)
任意の論理式 G とその部分式 r において、G のトップレベルから論理式の構造を辿って r に到るまでに否定記号を偶数 (奇数) 回通過するときに、r は G 中で正 (負) の出現をするという。

定義 3 (拡張 unfolding)
任意の論理式 G において、述語 $\boldsymbol{p}$ のうち正 (負) に出現するものを $\boldsymbol{Q}^+[\boldsymbol{x}]$ ($\boldsymbol{Q}^-[\boldsymbol{x}]$) で *unfold* することを拡張 *unfolding* といい、$G\{\boldsymbol{Q}^+[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p};\boldsymbol{Q}^-[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\}$ と書く。また、単なる *unfolding* のときと同様に n 回繰り返し適用する場合には $G\{\boldsymbol{Q}^+[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p};\boldsymbol{Q}^-[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\}^n$ と書く。

$$G_n \equiv G\{\boldsymbol{Q}^+[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p};\boldsymbol{Q}^-[\boldsymbol{x}]/\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\}^n \tag{2}$$
$$G_n^{ft} \equiv G_n\{\mathbf{f}/\boldsymbol{p};\mathbf{t}/\boldsymbol{p}|\boldsymbol{x}\} \tag{3}$$

と定義すると次のことが言える。

定理 4
論理式 G が自由変数を含んでいないとき、任意の n に対して以下の式が成り立つ。

$$A,P \vdash G_n^{ft} \rightarrow G_n \tag{4}$$
$$A,P \vdash G_{n+1} \rightarrow G_n \tag{5}$$
$$A,P \vdash G_n^{ft} \rightarrow G_{n+1}^{ft} \tag{6}$$
$$A,P \vdash G_n^{ft} \rightarrow G \tag{7}$$

証明は参考文献 [3] にある。
この定理を図示すると次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccccccc} G & \leftarrow & G_1 & \leftarrow & G_2 & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & G_n & \leftarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \cdots & & \uparrow & & \cdots \\ & & G_1^{ft} & \rightarrow & G_2^{ft} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & G_n^{ft} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

ここで、論理式 G が自由変数 $\boldsymbol{y}$ を含んでいる場合を考える。論理式 R において、その中の自由変数 $\boldsymbol{y}$ を項 $\boldsymbol{a}$ で置換えた式を $R\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{y}\}$ と書くことにすると、任意の定数 $\boldsymbol{a}$ に対して、(7) によって

$$A,P \vdash G_n^{ft}\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{y}\} \rightarrow G\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{y}\} \tag{8}$$

である。

一方、G_n^{ft} は $\boldsymbol{y}$ を含み、ユーザ述語を含まない式である。A において限量子消去が可能であれば、G_n^{ft} に限量子消去を行うことにより、$A,P \vdash G_n^{ft}\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{y}\}$ を満たす $\boldsymbol{a}$ を求めることが可能であるため、(8) によって、その $\boldsymbol{a}$ に関して

$$A,P \vdash G\{\boldsymbol{a}/\boldsymbol{y}\}$$

となり、$G_n^{ft}[y]$ を満たす解が(すべてではないにしろ)求められたことになる。また、式(6)からは、$G[y]_n^{ft}$ を満たす y の集合は n に関して単調に増加していることがわかり、単調に増加する解の逐次近似が得られることになる。

ただ、この手法では、n を十分に大きくすれば G の解のすべてを求められるわけではなく、G の十分条件を求めるに留まっている。元の公理系 A が完全な場合には、参考文献 [3] と同様の方法で 3 値論理を用いて次の関係が導けると予想される。

A が完全なとき

$$P' : \begin{cases} p(x) & \leftarrow_3 \quad Q^+[x], \\ \neg p(x) & \leftarrow_3 \quad \neg Q^-[x] \end{cases}$$

と P' を定義すると自由変数として y を含む論理式 G に関して、任意の定数 a に対してある n が存在して、$A \vdash G_n^{ft}\{a/y\}$ と $A, P' \models_3 G\{a/y\}$ は同値である。

4 おわりに

以上をまとめると次のようになる。

任意の公理系 A において、$P : p(x) \leftarrow Q^+[x], \neg p(x) \leftarrow \neg Q^-[x]$ という形で新たな述語を定義した系において、ゴール $G[y]$ が与えられたとき $G[y]\{x : Q^+[x], Q^-[x]\}^n\{f, t\}$ に限量子消去を行って得られる y の任意の値 a は $A, P \vdash G\{a/y\}$ を満たし、その全体は、n に関して単調に増大する。ただし、一般には、どのように n を大きくしても $A, P \vdash G\{a/y\}$ を満たすすべての a が求まるわけではない。そこで、現実的には $\neg G[y]$ を操作の対象にして、解になり得ない領域を求めることで対応することが考えられる。

よって、本稿で示した手法は、限量子消去が可能な任意の公理系に、ユーザ述語を定義した系に関しても(十分条件ではあるが)解を求める手続きとなる。

参 考 文 献

[1] 秋葉, 元吉, 佐藤: 論理プログラムの新しい完備化と展開に基づく計算手続きについて, 情報処理学会論文誌, Vol. 41, No. 11, pp3023–3036 (2000).

[2] 秋葉, 元吉, 佐藤: 論理式の置換と選言標準形への変形による論理プログラムの計算手続き, 人工知能学会論文誌, Vol. 41, No. 2E, pp.96–103 (2003).

[3] 秋葉, 佐藤: ルールの本体での置換と選言標準形への変形による論理プログラムの計算手続き, 人工知能学会論文誌, Vol. 42, No. 5G, pp.413–420 (2004).

[4] F.Motoyoshi,T.Sato: Implementation of Augmented Logic Language (ALL), Advances in Software Science and Technology, Vol. 5, pp.91–106 (1993).

[5] 元吉, 秋葉, 佐藤: 等号公理下での論理式の標準形とその一階言語への応用, 京大数解研講究録, Vol. 1138, pp.220–225 (2000).